

Der beste Würfel

Mathematik
Wahrscheinlichkeitsrechnung, Pfadregeln

Darum geht's: Die Schüler sollen die 21 „Augen“ eines normalen Spielwürfels neu auf den sechs Seiten eines Blankowürfels verteilen, so dass dieser im direkten Vergleich mit einem normalen Würfel durchschnittlich öfter die höhere Augenzahl zeigt.

Mittelstufe (9. Klasse)

Vorwissen: Pfadregeln

Zeitbedarf

45 Minuten



Material

– Blankowürfel zum Beschriften oder Würfelnetze zum selbst zusammenkleben für jede Gruppe

So geht's los:

Der Lehrer stellt den Schülern zunächst anhand zweier normaler Spielwürfel das Spiel „Hoch gewinnt“ vor: Zwei Spieler werfen gleichzeitig einen Würfel, die höhere Zahl gewinnt und der entsprechende Spieler erhält einen Punkt. Bei Gleichstand gibt es keine Punkte. Wer zuerst 20 Punkte hat, gewinnt das „Duell“. Nachdem kurz die Fairness des Spiels diskutiert wurde und eventuell einige Runden gespielt wurden, wird den Schülern (in Gruppen) je ein Blankowürfel ausgeteilt und die Frage aufgeworfen, ob man die 21 „Augen“ des Würfels nicht besser verteilen kann, so dass man die Gewinnchance gegen einen normalen Würfel erhöht.

Forschungsauftrag

Beschriftet in eurer Gruppe einen Würfel mit insgesamt 21 „Augen“ so, dass er für das Spiel „Hoch gewinnt“ gegen einen normalen Spielwürfel „optimal“ geeignet ist und begründet eure Wahl der Augenverteilung. Dabei dürfen verschiedene Seiten auch gleich viele Augen haben und es dürfen auch Seiten ganz leer bleiben.

So wird's leichter ...

Die Schüler werden vermutlich zunächst der Meinung sein, dass eine andere Verteilung der 21 Augen die Gewinnchancen nicht beeinflusst. Hier kann der Lehrer auf den Spezialfall der Verteilung (21,0,0,0,0,0) hinweisen, den die Schüler problemlos als ungünstig identifizieren.

Dies bringt im Regelfall zunächst die Idee der möglichst gleichmäßigen Verteilung, z.B. (4,4,4,3,3,3) was sich aber noch nicht als entscheidende Verbesserung herausstellt.

Das steckt dahinter ...

Es ist für Schüler der 9. Jahrgangsstufe nicht offensichtlich, dass nicht allein der Durchschnittswert der Augenzahlen auf den Seiten (der ja bei 21 Gesamtaugen unabhängig von der Verteilung stets genau 3,5 ist) für die Gewinnchance bei „Hoch gewinnt“ verantwortlich ist.

Ähnlich gelagert ist das Problem der „Efron“-Würfel (siehe Quelle), bei dem drei Würfel so beschriftet werden (nicht unbedingt mit der gleichen Augensumme), dass sie bezüglich der „gewinnt ‚Hoch gewinnt‘ mit

höherer Wahrscheinlichkeit“-Relation in nicht transitiver Beziehung stehen, das heißt Würfel A ist „besser“ als Würfel B, Würfel B „besser“ als C und Würfel C „besser“ als A.

So geht's auch ...

- Die Schüler können in einem Turnier ihre Würfel gegeneinander testen und rechnerisch nachrechnen, welcher „der Beste“ ist. Dabei sollte der Hinweis durch den Lehrer auf die Efron-Würfel nicht fehlen.
- Die Beschriftung mit beliebigen reellen Zahlen mit Summe 21 wird erlaubt.
- Es werden tetraederförmige Würfel benutzt.

Da findet man mehr ...

Quelle zu Efron-Würfeln: Lambacher Schweitzer 9, S. 131

So lief's bei mir (Erfahrungsbericht der Lehrkraft)

Mögliche „bessere“ Würfel der Schüler sind zum Beispiel solche mit den Verteilungen (5,4,4,4,0), (6,5,5,0,0), (6,6,5,4,0,0) oder (6,6,6,3,0,0). Dies rechneten die Schüler anhand der Pfadregeln nach. Am Beispiel der letztgenannten Verteilung sah eine solche Rechnung zum Beispiel so aus:

